

# Quantization of conductivity of nanotechnological point contact. Simple derivation of the Landauer formula

T. Mishonov\* and M. Stoev†

*Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics,  
University of Sofia St. Kliment Ohridski,  
5 J. Bourchier Boulevard, BG-1164 Sofia, Bulgaria*

(Dated: December 31, 2013)

A simple methodical derivation for Landauer quantization of the conductivity is derived as a simple consequence of the Bohr quantization laws. The level of explanation corresponds to high-school level of Physics education and can be used as popular lecture for students. The purpose of the work is to introduce students in an achievement of nano-technology which is relevant to the future electronics. Using only the fundamental laws of quantization students can understand a contemporary experimental research and to follow future development in the field.

PACS numbers: 01.40.Fk, 73.63.Nm, 73.63.Rt

## I. INTRODUCTION

The permanent miniaturization in the electronic technology leads to the need of mentioning the quantum effects, while exploring the electron transfer in nano-structures. For example in the common copper cables the electrons are moving the same way as in a bulk polycrystalline metal, but when the wideness of the conductor is in the sub-micron area, there are observed quantum effects. In these extremely thin wires, or as they are usually called nano-wires, the electron moves by the length of the conductor like a wave; the wideness of the wire must be less than 100 nm. We must calculate the current, caused by the different types of electron waves, which are conveyed through the nano-wire the same way as the television signal is transferred through the coaxial cable. When the nano-wires are small enough and are very precisely made, the electron diffusion is low enough and we can think of them like “flying” through the whole wire with a constant velocity  $v$  and momentum  $p$ . This kind of movement is called ballistic, like a free flying bullet. The problem of calculating the electric conductivity of a nano-wire, connecting two bulk conductors as is shown on Fig. 1, was solved before nearly half a century by Rolf Landauer, who worked then in IBM. The predicted by Landauer quantization of the conductivity was demonstrated very precisely by a split gate field effect transistor<sup>1,2,3</sup>, shown schematically on Fig. 2. This theory is used for the analysis of the work of sub-micron nano-structures, as the whole contemporary electronics are based on the nano-technology. In leading electronic companies there were made fundamental explorations of the properties of nano-structures in different conditions; for example, there was examined their behavior in very low temperatures. The purpose of the present work is to describe the experiments<sup>1,2,3</sup> and to make a simple deviation of the Landauer’s formula, using only the fundamental principles of Physics, formulated by Niels Bohr. For understanding the deviation is necessary only familiarity with the atomic model of Bohr, which is already taught in the high-school level of education. That is why our

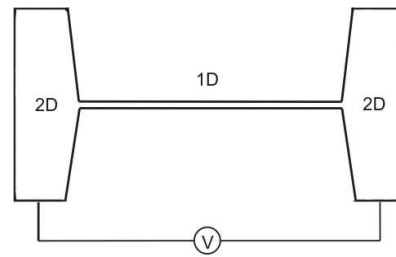


FIG. 1: One dimensional (1D) channel connecting two bulk two-dimensional (2D) conductors. Applied voltage creates current and the conductivity is quantized.

work may be used by teachers, who want to show their classes a new material from the contemporary Physics, but some pupils may understand the present work themselves. Usually while analyzing some occurrences the action of the border is too low to be assumed. For example the heat capacity of a ring and a cylinder made from the same material is practically equivalent. That is why it’s understandable that we will use the conclusion of a helping problem to analyze the conductivity of a nano-wire. This helping solution concerns electrons, circulating on a nano-ring. Instead of exploring a flow of electrons, transferred in a nano-wire from the negative electrode. We will concentrate on electrons, winding in one direction on a sub-micron conductive ring with radius  $r$ . After the analysis of the reference between the current and the potential we will “cut” the ring and will apply the results for the analysis of the conductivity of nano-technology

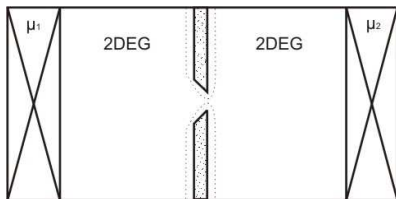


FIG. 2: Realization of 1D conductor (point contact) by split-gate technology field effect transistor. Gold split-gate rejects the electrons from the two dimensional electron gas (2DEG) in thin GaAs layer. The levels  $\mu_1$  and  $\mu_2$  of the two Fermi seas are different.

point contacts.

## II. REALIZATION OF THE EXPERIMENT

Let us describe shortly the realization of the one-dimensional electron conductor by semi-conductive nano-structures. Decreasing the dimensionality is achieved in two separate stages, and technologically the most important step is the establishing of two-dimensional electron gas 2DEG. For that reason there are used laminar semi-conductive structures. A thin coat of GaAs is placed in AlGaAs. Closely to that coat the bulk AlGaAs is alloyed in a very thin area with Si. The electron leaves the Si donors and fall into the potential hole of GaAs. In this situation their wave-functions are just standing waves, like the tremble of a violin string. But in the flat of the interface the electrons move like free two-dimensional particles and their wave-functions are flat waves. In different words, we can assume that in the thin coat the electrons are soaring like seagulls above the surface of the sea. Their dissipation on the distant ionized Si donors is low and the conductivity of the 2DEG is very high. The density of this depraved electron gas is very high, and we have a two-dimensional metal when the temperature is low. This metal is very well insulated from the semiconductor, in which it's situated. For that structure the Pauli prohibition is valid and the electrons fill all the electron states to some highest possible energy  $E_{\max}$ , called Fermi energy, as it is schematically depicted on Fig. 3. The mentioned above filling of electron position is analogous to the filling with water of all the volumes in Earth,

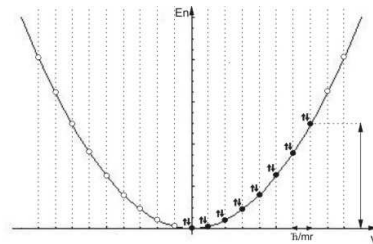


FIG. 3: Energy quantization when electrons circulate around a ring with radius  $r$ . Due to Bohr laws the angular electron momentum is quantized. This leads to velocity and energy quantization. Open circles presents empty electron orbitals. Filled circles denote double electron occupied states. The electrons moving in right direction have a maximal energy.

beneath the sea level and that is why the phrase Fermi sea is usually used. In our case the sea is two-dimensional. The technological problem is to create one-dimensional channel between two seas of that kind. For this purpose one split-gate of two gold electrodes is used, evaporated on a semi-conductor hetero-structure. That is how we create a field effect transistor, demonstrated on Fig. 2. The source and the stock have an Ohm connection with the 2DEG. When we put a strongly negative potential on the gate, the electrons below it disappears, ejected awry by the Coulomb repulsive force of the gate. That is how the connection between the two sees is interrupted and the transistor is bung and stopped. When we decrease the force of rejection by changing the gate voltage the contact between the Fermi seas is recovered and the electrons run from one sea, to the other through the narrow one-dimensional channel, created under the split-gate. In this phase of their transfer, the electrons have almost one-dimensional motion - like waves in a waveguide. They do not diffuse, but fly like bullets. That is why we call that condition a Ballistic regime. The wave-function of the electrons are flat waves stretched by the length of the channel, and in the perpendicular direction they are standing waves. The filling of the electron states depends on the potential, so the gate voltage determines the number of the open electron channels. Each of these channels gives one quantum of conductivity to the whole conductivity of the nano-technology point contact. Now we can understand the step-looking nature of the relation between the conductivity and the gate voltage in the low-temperature range, shown on Fig. 4. Each step

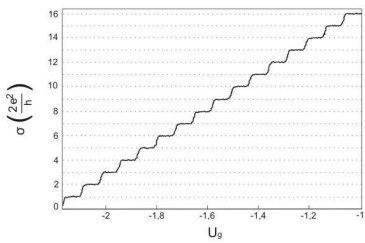


FIG. 4: Conductivity  $\sigma$  of the field effect transistor versus gate voltage  $U_g$ . Increasing the voltage opens new electron channels. Every open electron channel gives one conductivity quantum  $2e^2/h$  to the whole conductivity which creates the height of the steps.

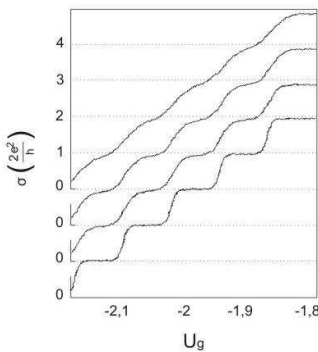


FIG. 5: Conductivity  $\sigma$  versus gate voltage  $U_g$  at different temperatures. Increasing the temperature smears the steps of conductivity quantization. At high temperatures the conductivity quantization disappear.

means that one more one-dimensional channel has been opened between the Fermi seas. Increasing the temperature means that the steps become smoothed-out and indistinct, see Fig. 5; freezing brings us more step-looking figure. The height of the step may be computed with elementary knowledges. These calculations were realized in the next part of this work. If we want to be more accurate we have to take into account currents in the opposite

directions, when  $U$  is a small difference between the levels of the Fermi seas, but the result remains the same. That is all we will say about the realization of the experiment. In the next section the Landauer formula will be deviated, describing the quantization of the conductivity. After that we will describe the influence of the different temperatures to the conductivity of the nano-technology point contact.

### III. DEVIATION OF THE LANDAUER FORMULA

As we had already mentioned, we will analyze a mental experiment with electrons, winding on a circle with radius  $r$ , like the atomic model of Bohr. That experiment will help us to solve our problem. When an electron circulates with velocity  $v$  the period of its round is  $2\pi r/v$  (time is equal to the path divided by velocity). And the average current  $I_n$  is simply the electron charge  $e$  divided by the period (by definition the current is the charge per unit time)

$$I_n = \frac{ev_n}{2\pi r}. \quad (1)$$

The index  $n$  means that we respect the quantum properties of the electron. The integer  $n$  shows us how many wavelengths of the electron  $\lambda_e = 2\pi\hbar/p$  can be put together in perimeter of the circle  $2\pi r = n\lambda_e$ . According to the Bohr's law the angular momentum is quantized

$$mvr = n\hbar, \quad (2)$$

where  $\hbar = 1.055 \times 10^{-34}$  Js is the Plank's constant and the integer  $n$  is called magnet quantum number in the atomic physics,  $m$  is the effective mass of the electron in the crystal grid. From Bohr's law we can calculate the velocity:

$$v_n = \frac{\hbar}{mr}n. \quad (3)$$

And we can put the results back in the formula, applied to the formula for the current Eq. (1).

$$I_n = \frac{e\hbar}{2\pi mr^2}n. \quad (4)$$

The quantization of the velocity causes quantization of the kinetic energy too

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{mr^2}n^2. \quad (5)$$

This formula explains the energetic spectrum of an electron, winding on a circle with a fixed radius, graphically shown on Fig. 3. Its now easy to calculate the whole current, caused by all the electrons, circulating in one direction  $v > 0$ , assuming tat all the electron states with energy in the range from  $E = 0$  to  $E = E_{\max}$  are filled with

exactly 2 electrons each (with spin “up” and “down”). According to the Pauli’s principle of prohibition each electron state can be filled only with one electron with certain spin and from the equation about the spectrum its obvious, that the maximal energy  $E_{\max}$  can be parameterized with one big integer  $N$  or with an item, having the character of electric potential  $U$

$$E_{\max} = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{mr^2} N^2 = eU. \quad (6)$$

The whole current is equal to the sum of all the electron currents

$$I = 2 \sum_{n=0}^N I_n. \quad (7)$$

In other words, a sum through all the electron states ought to be made. We can use the formula for the arithmetic progression for big enough numbers  $N \gg 1$

$$\sum_{n=1}^N n = 1 + 2 + 3 + \dots + N = \frac{N(N+1)}{2} \approx \frac{N^2}{2} \gg 1. \quad (8)$$

We apply this formula for to the calculation of the currents Eq. (7), expressed by Eq. (4)

$$I = 2 \sum_{n=0}^N I_n = 2 \sum_{n=0}^N \frac{e\hbar}{2\pi mr^2} n = \frac{2e\hbar}{2\pi mr^2} \frac{N(N+1)}{2}. \quad (9)$$

The integer  $N$  is much bigger than 1, so in a good approximation we may assume that  $N(1 + 1/N) \approx N$  and there we have

$$I = 2 \frac{e}{2\pi\hbar} \left( \frac{\hbar^2 N^2}{2mr^2} \right). \quad (10)$$

Here the expression in the brackets is the highest possible energy of the electrons mentioned in Eq. (6). Now we have the opportunity to express the current by an electric potential

$$I = \frac{2e^2}{2\pi\hbar} U = \frac{2e^2}{h} U = \sigma U, \quad (11)$$

following the tradition we have used the old Plank constant  $h = 2\pi\hbar$ . By definition the conductivity  $\sigma$  is the current, divided to the voltage  $\sigma = I/U$ . In this whole calculation we assume that the regime of the electrons, transferred through the ring is ballistic, where the electron diffusion is neglected. That is why the electron wavelength have to be shorter than the average free path of the electron. The result we achieved is applicable for short enough nano-wires, including point-contacts too, where the one-dimensional movement is in a very slight area. Now we have the Landauer formula, describing the quantization of the conductivity of one-dimensional conductor.

$$\sigma_0 = \frac{2e^2}{h} = \frac{1}{12906 \Omega} = 77.5 \mu\text{Sm}. \quad (12)$$

In the realistic nano-technology point-contacts the conductivity is achieved as a result of a great number of such one-dimensional channels and to calculate the whole conductivity, we ought to multiply the conductivity quantum  $\sigma_0$  by the number of the opened one-dimensional electron channels  $K$

$$\sigma = K\sigma_0 = K \frac{2e^2}{h}. \quad (13)$$

#### IV. THE INFLUENCE OF FINITE TEMPERATURE

Lets research the results, achieved by realizing the experiment. In this work there was used the transistor, shown on Fig. 2. The temperature, in which the measurements were made is close to the absolute zero  $T = 0.6$  K. Measuring the voltage, the conductivity can be calculated for different values of the negative gate potential  $U_g$ , applied to the point contact. A simple parallel can be made, concerning the negative voltage, which can help the reader to understand the graphical relation between  $\sigma$  and  $U_g$ , shown on Fig. 4. The applied negative gate voltage can be assumed as a wideness of the point contact. This parallel was explained and used yet in the second section. Increasing  $U_g$  means the point contact becomes narrower. Therefore, by changing the gate voltage we can increase or decrease the conductivity of the nano-technology point contact, as we act on its wideness. That is how this simple analogy between electrical potential and wideness helps us to reduce our problem to the simple model of an usual Ohm’s conductor.

The conductivity is shown in units  $2e^2/h$ . It’s interesting, that the conductivity is not increasing linearly with the accretion of the wideness of the point contact, but, as there was already mentioned, the function has a strange vision, it increases in some portions, steps or, as we call them - quants, each of these leading to increasing  $\sigma$  with  $2e^2/h$ . When  $U_g = -2.2$  V the conductivity is zero. This means that there is no current transferred and that the point contact is stopped. In other words while  $U_g = -2.2$  V the wideness of the gate is zero and the circuit is ceased, because all the electrons from the contact are ejected awry due to the electric rejection forces. The quantization of the conductivity of the unit shown on Fig. 2 in the mentioned conditions can be detected in the range from  $U_g = -0.3$  V to  $U_g = -2.2$  V, when the circuit is disconnected. In this range the conductivity changes altogether 16 times, and each of these portions is equal to  $2e^2/h$ . The graphics also shows that the quantization of the conductivity is not entirely sharp and distinct, the steps are a little bit rounded. The reason for that indefinite vision of the function is the resistance of the 2DEG zones, which approximately measures 400  $\Omega$ . Furthermore it is possible to see that the higher is the conductivity, the smoother is the function. The explanation for this occurrence in that the 2DEG zones resistance becomes a bigger part of the whole resistance of the

circuit, as the resistance of the point contact decreases. Now we have the relation  $\sigma/U_g$  entirely explained for  $T = 0.6$  K. A very interesting question is to explore the same experiment made in the conditions of some different temperatures  $T$ . The graphic showing the changes of  $\sigma$  as a function of  $U_g$  is shown on Fig. 5. This time there are demonstrated the measured values for different temperatures: 0.3 K, 0.6 K, 1.6 K, 4.2 K. Obviously the quantization of the conductivity tends to disappear when increasing the temperature. Even when  $T = 4.2$  K it is really hard to see it. We have already considered all of the most interesting and important aspects of the quantization of the conductivity of the nano-technology point contacts. Now we ought to mention one very important detail about this problem. We have already understood where the Ohm's resistance appears in the point contact, but our work would be incomplete if we overpass the question where the Ohm's heating becomes; we ought to mention something about the inconvertible character of the point contact. The electrons pass through the gate in ballistic regime, so there is no heat emitted. The heat, actually, is generated when the electrons transfer from the first Fermi sea to the other through the one-dimensional channel and they begin to hit into the surrounding walls. The situation when an electron is coming

into a sea through the point contact reminds the model of the black body radiation. Exactly as the beam of light, fallen through the narrow hole into the box cannot went out, exactly the same situation we have with the electron, fallen into the second 2DEG zone. It cannot get back to the first Fermi sea through the point-contact. Therefore the irreversibility of the process of transferring electrons through nano-technology point contacts appears in the non-elastic hits, which the electrons bear when coming to the second, lower level Fermi sea. This process is just the same as the heating of water, which overflows from one reservoir to another. In the present work we have solved a contemporary quantum problem, although the results, necessary for the interpretation of the experimental data were achieved with elementary methods, taught in the high-school level of Physics education.

### Acknowledgments

One of the authors (TM) is thankful to T. Teodosiev for invitation this work to be presented at the school in Kazanlak and to H. Hristov for the interest and support.

---

\* E-mail: mishonov@phys.uni-sofia.bg

† E-mail: martin.stoev@abv.bg

<sup>1</sup> B.J. van Wees, H. van Houten, C.W.J. Beenaker, J.G. Williamson, L.P. Kouwenhoven, D. van der Marel, and C.T. Foxon, Phys. Rev. Lett. **60**, 848 (1988).

<sup>2</sup> B.J. van Wees, L.P. Kouwenhoven, E.M.M. Willems, C.J.P.M. Harmans, J.E. Mooij, H. van Houten, J.G. Williamson, and C.T. Foxon, Phys. Rev. B **43**, 12431 (1991).

<sup>3</sup> L.P. Kouwenhoven, "Transport of Electron-Waves and Single-Charges in Semiconductor Nanostructures", Ph.D Thesis Technische Universiteit Delft (1992); Chap. I.

## V. TRANSLATION IN SLOVAK LANGUAGE: ÚVOD

Neustála miniaturizácia v elektronike núti k tomu, aby boli kvantové efekty vypočítavané, počas výskumu nanoštruktúr. Napríklad v obyčajných medených kábloch elektróny sa pohybujú presne tak isto, ako v objemovom polykrištálovom kove. Keď ale šírka vodiča je v submikrónnom rozsahu, zjavujú sa kvantové efekty. V týchto mimoriadne tenkých kábloch, zvyčajne nazývané nano-káble, elektróny sa pohybujú po dĺžke vodiča ako vlna; šírka kábla musí byť menšia ako 100 nm. Musíme vypočítať elektrický prúd, spôsobený rozličnými typmi elektrónových vln, ktoré sa prenášajú cez nano-kábel tým istým spôsobom, ako sa prenáša televízny signál cez koaxiálny kábel. Keď sú nano-káble dostatočne

malé a sú precízne vyrobené, rozptyľovanie elektrónov je dostatočne malé a môžeme o nich uvažovať ako "letiace" cez celú dĺžku kábla s konštantnou rýchlosťou  $v$  a momentom  $p$ . Tento spôsob pohybu sa nazýva balistický, ako vystrelená guľka. Úloha pre vypočítavanie konduktivity nano-kábla, spájajúceho dva objemné voidče, ako je ilustrované na Fig. 6, bola vyriešená ešte pred približne pól storočím Rolfom Landauerom, ktorý vtedy pracoval pre IBM. Predznamenaná od Landauera kvantizácia konduktivity bola demonštrovaná veľmi precízne od tranzistora s rozštiepeným gejtom<sup>1,2,3</sup>, demonštrovaný schématicky na Fig. 7. Táto teória sa používa pri analyzovaní submikrónnych nano-štruktúr, keďže celá dnešná elektronika sa opiera na nano-štruktúru. V niektorých vedúcich elektronických firmách boli urobené fundamentálne skúmania vlastností nano-štruktúr pri rôznych podmienkach, napr. bolo preskúmané ich chovanie pri veľmi nízkych teplotách. Cieľom nasledujúceho materiálu je opísať experimenty<sup>1,2,3</sup> a vyvinúť jednoduchý vývod Landauerovej formuli, s pomocou len elementárnych princípov fyziky, formulované od Nielsa Bohra. Pre pochopenie vývodu je potrebné len poznanie Bohrového atomového modelu, ktorý sa už niekoľko desaťročí vyučuje na gymnaziálnej úrovni. S tohto dôvodu sa naša práca môže používať od učiteľov, ktorí by chceli demonštrovať svojim žiakom nový material z dnešnej fyziky; niektorí žiaci by mohli nasledujúcu prácu pochopiť aj samostatne. Zvyčajne pri skúmaní nejakého javu vplyv hranice je príliš malý, aby bol zdôrazňovaný

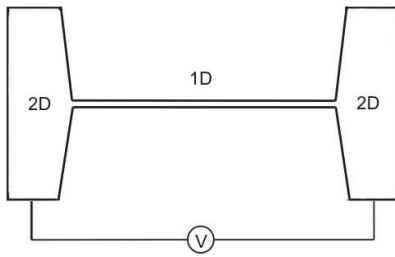


FIG. 6: Jednodimenziálny (1D) kanál spájajúci dva objemné dvojdimenziálne (2D) konduktori. Pridané napätie vyvoláva prúd a konduktivita je kvantizovaná.

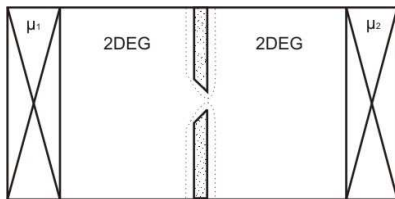


FIG. 7: Realizácia 1D vodiča (bodového kontaktu) pomocou tranzistora s rozštiepeným gejtom. Zlatý gejt odpudzuje elektróny z dvojdimenziálneho elektrónneho plynu (2DEG) v úzkej GaAs vrstve. Úrovne  $\mu_1$  a  $\mu_2$  Fermiho morý sú rôzličné.

a tým pádom sa nepočíta. Napríklad tepelná kapacita prstena a cylindra, vyrobených s toho istého materiálu je prakticky rovnaká. V takom prípade je pochopiteľné, že použijeme riešenie pomocného príkladu pre analýzu konduktivity nano-kábla. Tento pomocný príklad spočíva v tom, robiť výpočty pre elektróny, cirkulujúce po nano-prstene, namiesto skúmania toku elektrónov, “prelietajúcich” cez nano-kábel, od negatívneho elektródu k pozitívnemu. My sa sústrdíme na elektróny, cirkulujúce

v jednom smere po nano-prstne s radiusom  $r$ . Keď už budeme mať analýzu vzťahu elektrického prúdu k napätiu, “rozrežeme” prsteň a využijeme výsledky pre konduktivitu nano-technologických bodových kontaktov.

## VI. REALIZÁCIA EXPERIMENTU

V nasledujúcich riadkoch opíšeme v krátkosti realizáciu jednorodného elektrónového vodiča pomocou polovodičových nanoštruktúr. Zníženie dymenzionality je dosiahnuté v dvoch rozdielnych fázach, a z technologického hľadiska je najdôležitejší prechod vytváranie dvoj-dimenziálneho elektrónneho plynu 2DEG. Z tohto dôvodu sa používajú laminárne polovodičové štruktúry. Tenká vrstva GaAs sa nanáša do AlGaAs. Blízko tejto vrstvy sa objemný AlGaAs jónizuje v tenkej vrstve so Si. Elektrón vybieha z Si donorov a padá do potenciálnej jamy GaAs. V tejto situácii ich vlnové funkcie sú jednoducho stojace vlny, ako tie, čo sa vytvárajú pri chvení struny husličiek. V plošine prostredia sa ale elektróny pohybujú ako voľné dvoj-dymenziálne častice a ich vlnové funkcie sú ploché vlny. Inými slovami, môžeme počítať, že elektróny sa vznášajú ako čajky nad morskou hladinou. Ich rozptýlenie na vzdialených jónizovaných Si donoroch je veľmi malé a preto konduktivita 2DEG-u je veľmi vysoká. Hustota tohto elektrónneho plinu je veľká, a môžeme uvažovať, že máme dvoj-dymenziálny kov pri nízkych teplotách. Tento kov je veľmi dobre izolovaný od semikonduktora, v ktorom je umiestnený. Pre túto štruktúru Pauliho zábrana účinkuje a všetky elektróny vyplňajú všetky elektrónné úrovne po nejakú maximálnu možnú energiu  $E_{\max}$ , zvanou Fermiho energia, ako je schematicky ukázané na Fig. 8.

Predtým spomenuté zaplňanie lektónnych pozícií je analogické zaplňaniu prázdnych medzier na zemskom povrchu vodou po úroveň morskej hladiny; z tohto dôvodu sa často používa fráza Fermiho more. V našom prípade more je dvojdimenziálne. Technologický problém je vyrobiť jednorodný kanál medzi dvoma podobnými morami. Na dosiahnutie tohto cieľa je použitý rozštiepený gejt z dvoch zlatých elektród, vyparený na polovodičovú heteroštruktúru. Táto metóda na výrobu tranzistora s rozštiepeným gejtom sa používa, a je demonštrovaná na Fig. 7. Sólce a stok majú ohmové spojenie s 2DEG. Keď gejtu pridáme silne negatívny potenciál, elektróny pod ním zmiznú, vytlačené nabok coulombovými odpudzujúcimi silami gejtu. Týmto spôsobom sa spojenie medzi dvoma morami preruší a tranzistor sa upchá. Keď silu odpudzovania zmenšíme, zmenením gejtového napätia kontakt medzi Fermi morami sa znovu vytvára a elektróny prechádzajú z jedného mora do druhého cez úzky jednodymenziálny kanál, vytvorený pod rozštiepeným gejtom. V tejto fáze transféru elektróny majú skoro jednosmerný spôsob pohybu - ako vlny vo vlnovode. Oni sa nerozptľujú, ale letia ako náboje. Z tohto dôvodu voláme tento typ pohybu balistický režim. Vlnové funkcie sú ploché vlny,

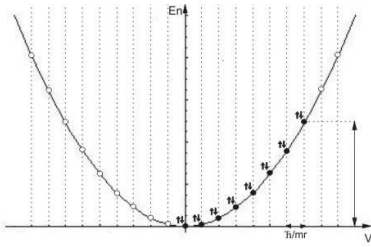


FIG. 8: Kvantizácia energie elektrónov, cirkulujúcich po okruhu s rádiusom  $r$ . Podľa Bohrových zákonov uhlový moment elektrónu je kvantizovaný. S toho je spôsobena kvantizácia aj rýchlosti aj energie. Prázdne krúžky demonštrujú prázdne elektrónne orbity. Plné krúžky ukazujú dvojito zaujaté úrovne. Elektróny sprava majú maximálnu energiu.

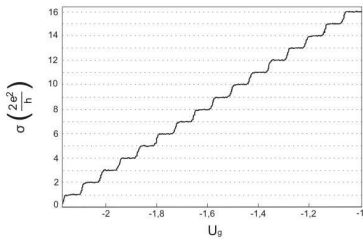


FIG. 9: Konduktivita  $\sigma$  tranzistora oproti gejtovej voltáže. Zvýšenie napätia otvára nové elektrónne kanály. Každý elektrónny kanál dáva o jeden konduktívny kvantum  $2e^2/h$  celej konduktivite, a vďaka tomu sa vytvára výška schodou.

rozsahujúce sa pozdĺž kanála, v perpendikulárnej rovine sú to stojaté vlny. Zaplnenie elektrónnych úrovní závisí od potenciálu, takže gejtová voltáž určuje počet otvorených elektrónnych kanálov. Každý z týchto kanálov dáva jeden kvantum konduktivity k celej konduktivite nano-technologického bodového kontaktu. Teraz už môžeme pochopiť “schodovitý” charakter vzhľadu relácie medzi

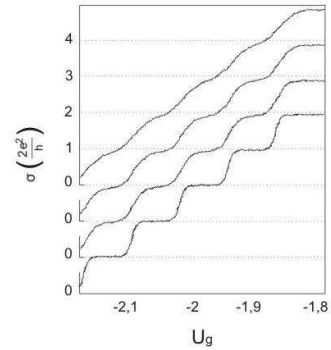


FIG. 10: Konduktivita  $\sigma$  oproti gejtovému voltážu  $U_g$  pri rôznych teplotách. Zvýšenie teploty robí schody kvantizácie hladšie. Pri vysokých teplotách kvantizácia konduktivity mizne.

konduktivitou a gejtovým napätím pri nízkych teplotách, zaobrazenu na Fig. 9. Každý “schod” znamená, že je otvorený ďalší jednomerný kanál medzi Fermiho morami. Zvýšenie teploty pridáva “schodom” hladkejší výzor. Postupne sa stanú neodhaliteľnými (Fig. 10); ochládzovanie nám prináša zdôraznenejšie schodito vyzerajúcu figuru. Výška schodou môže byť vypočítaná elementárnymi poznatkami. Tieto kalkulácie sú realizované v nasledujúcej sekcii tohto textu.

Aby sme boli prestní by sme museli počítať aj elektrické prúdy, prebiehajúce v opačnom smere, vtedy, keď  $U$  je malý rozdiel medzi rovinami Fermiho morí; nezávisle od toho výsledky zostávajú tie isté. To je všetko, čo povieme o realizácii experimentu. V nasledujúcej sekcii bude predstavený vývod na Landauerovú formulu, opisujúcu kvantizáciu konduktivity. Ďalej charakterizujeme vplyv zmeny teploty na konduktivitu nano-technologického bodového kontaktu.

## VII. VÝVOD FORMULE

Už sme spomenuli, že budeme analyzovať myslený experiment s elektrónmi, cirkulujúcimi po okruhu s rádiusom  $r$ , ako v atomovom modele Bohra. Teneto experiment nám pomôže pri riešení našej úlohy. Keď sa elektrón točí rýchlosťou  $v$  perióda jeho otáčky je  $2\pi r/v$  (čas sa vyjadruje ako prejdená cesta, rozdelená na rýchlosť). Stredný elektrický prúd  $I_n$  je proste náboj elektrónu  $e$  rozdelený na periódu (definícia pre elektrický prúd je prebehnutí náboj za určitý čas)

$$I_n = \frac{ev_n}{2\pi r}. \quad (14)$$

Index  $n$  znamená, že rešpektujeme kvantové vlastnosti elektrónu. Celé číslo  $n$  ukazuje koľko krát dĺžka vlny elektrónu  $\lambda_e = 2\pi\hbar/p$  sa nachádza v perimetri kruhu  $2\pi r = n\lambda_e$ . Podľa Bohrovho zákona Uholový moment je kvantizovaný

$$mvr = n\hbar, \quad (15)$$

kde  $\hbar = 1.055 \times 10^{-34}$  Js je Planková konštanta a celé číslo  $n$  má názov magnetové kvantové číslo v átomovej fyzike,  $m$  je efektívna hmotnosť elektrónu v krištalickej štruktúre. Z Bohrovho zákona môžeme vypočítať rýchlosť:

$$v_n = \frac{\hbar}{mr}n. \quad (16)$$

Výsledky môžeme použiť vo formule o elektrickom prúde Eq. (14).

$$I_n = \frac{e\hbar}{2\pi mr^2}n. \quad (17)$$

Kvantizácia rýchlosti spôsobuje kvantizáciu kinetickej energie tiež

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{mr^2}n^2. \quad (18)$$

Táto formula opisuje energetické spektrum elektrónu, Točiacim sa po kruhu s fixovaným rádiusom, graficky ukázanom na Fig. 8. Vypočítavanie celého prúdu, spôsobeného všetkými elektrónmi, krúžiacimi v jednom smere  $v > 0$ , už nie je problém, považujúc, že všetky elektrónne úrovně v intervale od  $E = 0$  da  $E = E_{\max}$  sú zaplnené presne dvoma elektrónmi každá (zo spinom "hore" a "dolu"). Podľa Pauliho zábrane každá elektrónna úroveň môže byť zaplnená len jedným elektrónom s daným spinom a z formule o spektre je jasné, že maximálna energia  $E_{\max}$  môže byť parametrizovaná s jednou veľkou celou číslou  $N$  alebo s členom, majúcim rozmernosť elektrického potenciálu  $U$

$$E_{\max} = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{mr^2}N^2 = eU. \quad (19)$$

Celý prúd je suma zo všetkých elektrónnych prúdov

$$I = 2 \sum_{n=0}^N I_n. \quad (20)$$

S inými slovami, musí sa sumovať cez všetky elektrónne úrovně. Môžeme použiť formulu o aritmetickej progrésii pre dostatočne veľké číslo  $N \gg 1$

$$\sum_{n=1}^N n = 1+2+3+\dots+N = \frac{N(N+1)}{2} \approx \frac{N^2}{2} \gg 1. \quad (21)$$

Použijeme túto formulu pre kalkuláciu prúdov Eq. (20), vyjadreními cez Eq. (17)

$$I = 2 \sum_{n=0}^N I_n = 2 \sum_{n=0}^N \frac{e\hbar}{2\pi mr^2}n = \frac{2e\hbar}{2\pi mr^2} \frac{N(N+1)}{2}. \quad (22)$$

Celé číslo  $N$  je oveľa väčšia ako 1, takže s dostatočnou presnosťou môžeme prijať, že  $N(1 + 1/N) \approx N$  a dostaneme

$$I = 2 \frac{e}{2\pi\hbar} \left( \frac{\hbar^2 N^2}{2mr^2} \right). \quad (23)$$

Výraz v zátvorkách je maximálna možná energia elektrónov, spomenutých v Eq. (19). Teraz máme možnosť vyjadriť prúd pomocou elektrického potenciálu

$$I = \frac{2e^2}{2\pi\hbar}U = \frac{2e^2}{h}U = \sigma U, \quad (24)$$

Podľa tradície sme použili starú Plankovú konstantu  $h = 2\pi\hbar$ . Podľa definície, konduktivita  $\sigma$  sa rovná prúdu, rozdelenému napätiu  $\sigma = I/U$ . V celej kalkulácii sme počítali s tým, že režim elektrónov, prenášaných cez prestenoividny vodič, je balistický. Pri tomto režime elektrónne rozptílenie je zanedbateľné a preto dĺžka vlny elektrónov musí byť menšia ako stredný voľný priebeh elektrónu. Výsledok, ktorý sme dostali je možné použiť pre dostatočne krátke nano-káble a taktiež bodové kontakty, kde sa prechod uskutočňuje pomocou jednodimenziálneho pohybu. Teraz už máme Landauerovú formulu, opisujúcu kvantizáciu konduktivity jednodimenziálneho vodiča.

$$\sigma_0 = \frac{2e^2}{h} = \frac{1}{12906 \Omega} = 77.5 \mu\text{Sm}. \quad (25)$$

V reálnom nano-technologickom bodovom kontakte je konduktivita dosiahnutá pomocou veľkého množstva podobných jednodimenziálnych kanálov a pre výpočet celej konduktivity musíme násobiť kvantum konduktivity  $\sigma_0$  s počtom otvorených jednodimenziálnych kanálov  $K$

$$\sigma = K\sigma_0 = K \frac{2e^2}{h}. \quad (26)$$

## VIII. VPLYV TEPLOTY NA KONDUKTIVITU

Preskúmajme výsledky, dosiahnuté pri realizácii experimentu. V našej práci sme použili tranzistor, zobrazený na Fig. 7. Teplota, pri ktorej boli uskutočnené merania je blízka k absolútnej  $T = 0.6$  K. Dostávajúc informáciu o voltáži z prístrojov môžeme ľahko vypočítať konduktivitu pre rôzne veľkosti negatívneho gejtového voltážu  $U_g$ , priloženému k bodovému kontaktu. S týmto negatívnym voltážom sa môže urobiť jednoduchá analógia, ktorá nám pomôže pochopiť grafickú súvislosť medzi  $\sigma$  a  $U_g$ , ukázanú na Fig. 9. Pridaný gejtový potenciál môže byť prijatý ako šírka gejtú. Táto analógia už bola využitá v druhej sekcii. Zväčšenie  $U_g$  znamená, že sa bodový kontakt stane užším. To znamená, že menenie negatívneho napätia na gejte môže spôsobiť spád, alebo zvýšenie konduktivity nano-technologického bodového kontaktu, zmenením jeho šírky. Takto táto jednoduchá analógia



medzi potenciálom a šírkou nám umožnila redukovanie našej úlohy k prostému modelu obyčajnému Ohmovému vodiču.

Konduktivita je predstavená v jednotkách  $2e^2/h$ . Zaujímavé je, že sa konduktivita nezvyšuje lineárne s lineárnym zvečšením šírky bodového kontaktu, ale, ako sme už opísali, táto funkcia má zvláštny vzhľad; konduktivita sa zvečšuje v určitých porciách, dózach, nazývané kvanty. Každý z nich zvyšuje konduktivitu  $\sigma$  o  $2e^2/h$ . Keď  $U_g = -2.2$  V konduktivita je nulová. S toho vyplýva, že žiadny prúd neprechádza a bodový kontakt je uzatvorený. Inými slovami, keď  $U_g = -2.2$  V šírka gejtú je nulová a reťaz je prerušená, pretože všetky elektróny z kontaktu sú vytlačené nabok od elektrických odpudzujúcich síl. Kvantizácia konduktivity prístroja, ukázanom na Fig. 7 v spomenutých podmienkach môže byť detekovaná v hraniciach d  $U_g = -0.3$  V do  $U_g = -2.2$  V, keď je reťaz prerušená. v týchto hraniciach sa konduktivita mení spolu 16 krát, a každá z porcií sa rovná  $2e^2/h$ . Grafika taktiež ukazuje, že kvantizácia konduktivity nie je celkom prudká a presná, "schody" sú trochu oblé. Príčina tohto neideálneho vzhľadu funkcie je elektrický odpor 2DEG zón, ktorý je približne  $400 \Omega$ . Ďalej môžeme spozorovať, že čím je vyššia konduktivita, tým je funkcia oblejšia. Vysvetlenie pre tento jav nájdeme v opore 2DEG zón, ktorí sa stane väčšiou čiastkou celého odporu reťaze, kôli zníženiu rezistencie bodového kontaktu. Teraz už máme pomer  $\sigma/U_g$  vyjasnený pre  $T = 0.6$  K. Veľmi zaujímavá úloha je preskúmať ten istý experiment, prevedený pri rôznych teplotách  $T$ . Grafika, zobrazujúca zmeny  $\sigma$  ako funkcia  $U_g$  je ukázaná na Fig. 10. Tento raz sú tam zobrazené zmerané hodnoty pre rôzne teploty: 0.3 K, 0.6 K, 1.6 K, 4.2 K. Zrejme kvantizácia konduktivity postupne mizne so zvýšením teploty. Ešte pri  $T = 4.2$  K je už len ťažko rozlišiteľná. Už sme skončili s opisovaním väčšiny najdôležitejších a najzaujímavejších

aspektov kvantizácie konduktivity nano-technologického bodového kontaktu. Teraz by sme chceli opísať jeden veľmi dôležitý detail, týkajúci sa tejto práce. Už sme opísali kde vzniká Ohmova rezistencia v našom prístroji, ale naša práca by bola neuplná, keby sme vynechali otázku kde presne sa Ohmové zahrievanie prejavuje; na tomto mieste by sme chceli spomenúť niečo o neobratiteľnosti bodového kontaktu, pri zvýšení entropie. Elektróny prechádzajú cez gejt v balistickom režime, takže tu sa teplota nevyučuje. Teplota sa vlastne prejavuje pri prechode elektrónov z jedného Fermiho mora do druhého cez jednodimenziálny kanál a začínajú sa udierať do okolitých stien. Situácia, pri ktorej jeden elektrón vchádza do mora cez bodový kontakt pripomína model vysielania úplne čierneho telesa. Presne tak isto ako lúč svetla, padajúci cez úzky otvor do škatule ju už nemôže opustiť, aj elektrón, prešiel do druhej 2DEG zóny ju už nemôže opustiť cez jednodimenziálny kanál. Neobratiteľnosť procesu prenosu elektrónov cez nano-technologický kontakt sa prejavuje práve v neelastických úderoch, ktoré elektróny utrpia keď prejdú do druhého, nižšieho Fermiho mora. Tento proces je naplno identický so zahrievaním vody, ktorá sa prelieva z jedného rezervoáru do druhého. V našej práci sme vyriešili jednu zaujímavú úlohu z aktuálnej fyziky, aj keď výsledky, potrebné pre analýzu experimentálnych dát sme dosiahli s elementárnymi metódami, vyučovanými na strednoškolskej úrovni vyučovania z fyziky.

### Acknowledgments

Jeden z autorov (TM) ďakuje T. Teodosievovi za pozvanie pre prednášanie tohto textu v škole v Kazanlaku a H. Hristovi za záujem a podporu.