

## Единственост на статичните решения на уравненията на Айнщайн-Максуел, съдържащи фотонна сфера

Стойчо Язаджиев<sup>1</sup>, Боян Лазов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Катедра по теоретична физика, Физически факултет, Софийски университет "Св. Климент Охридски София 1164, България

Abstract. Разглеждаме теорема за единственост на статичното и асимптотически плоско пространство-време на Айнщайн-Максуел с фотонна сфера  $P^3$ . За тази цел първо модифицираме дефиницията на фотонна сфера за пространство-време с електричен заряд, като добавяме свойството, че едно-формата  $i_\xi F$  е нормална към фотонната сфера. След това фиксираме магнитния заряд да е равен на нула и предполагаме, че lapse функцията регулярно разслабва пространство-времето извън фотонната сфера. Като помощен (и сам по себе си важен) резултат доказваме, че  $P^3$  има константни средна и скаларна кривина. След това доказваме основната теорема за единственост. Тя гласи, че статично и асимптотически плоско пространство-време на Айнщайн-Максуел с неекстремална фотонна сфера е изометрично на пространство-времето на Райснер-Нордстрьом с маса  $M$  и електричен заряд  $Q$ , удовлетворяващи  $\frac{Q^2}{M^2} \leq \frac{9}{8}$ .

PACS codes: 04.20.Ex, 04.20.Jb, 04.40.Nr

### 1 Увод

Фотонните сфери са добре известно предсказание на Общата теория на Относителността (ОТО) и обобщените теории на гравитацията. Те са области от пространство-време, където светлината може да бъде ограничена в затворена орбита. Тясно свързани са с гравитационните лещи и следователно играят съществена роля за астрономията и астрофизиката.

Фотонните сфери са обекти с много специфични характеристики (константни средна и скаларна кривини, константна повърхностна гравитация и за статично пространство-време – константна lapse функция), по които си приличат с хоризонтите на събитията. Това естествено води до въпроса дали фотонните сфери могат да бъдат използвани за класификация на решенията на дадена гравитационна теория. Това

беше направено за статичните и асимптотически плоски решения на вакуумните уравнения на Айнщайн без и със скаларно поле. Като цяло този проблем за единственост е по-сложен отколкото случая, в който се използва хоризонта на събитията.

Ще разгледаме статични и асимптотически плоски вакуумни решения на системата уравнения на Айнщайн-Максуел, съдържащи фотонна сфера, и ще докажем, че са изометрични на решението на Райснер-Нордстрьом с маса  $M$  и заряд  $Q$  при условие, че  $M^2 \neq Q^2$  и  $\frac{Q^2}{M^2} \leq \frac{9}{8}$ .

## 2 Предварителни дефиниции и равенства

Разглеждаме гравитация на Айнщайн-Максуел, описвана от следното действие:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{L}^4} d^4x \sqrt{-g} (\mathfrak{R} - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (1)$$

където пространствено-времето многообразие е означено с  $(\mathcal{L}^4, g)$ ,  $\mathfrak{R}$  е скаларната кривина на Ричи и  $F$  е тензорът на Максвел.

Разглеждаме статично пространство-време, дефинирано както в [1], и дефинираме статичност на полето на Максвел,

$$\mathcal{L}_\xi F = 0, \quad (2)$$

където  $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$  е времеподобния Килингов вектор. Ще се съсредоточим върху изцяло електричния случай, за който  $\iota_\xi \star F = 0$ .

Пространство-времето, което разглеждаме, е и асимптотически плоско. Асимптотически плоско пространство-време се дефинира по обичайния начин [1]. Асимптотичното развитие на полетата се дава от следното:

$$g = \delta + O(r^{-1}), \quad N = 1 - \frac{M}{r} + O(r^{-2}), \quad F = -\frac{Q}{r^2} dt \wedge dr + O(r^{-3}) \quad (3)$$

спрямо стандартната радиална координата върху  $\mathbb{R}^3$ .  $M$  и  $Q$  са съответно масата и електричният заряд.

Освен това трябва да дефинираме фотонна повърхнина и фотонна сфера.

**Definiton 2.1.** Вложена времеподобна хиперповърхнина  $(P^3, p) \hookrightarrow (\mathcal{L}^4, g)$  се нарича фотонна повърхнина, ако всяка изотропна геодезична, първоначално тангенциална към  $P^3$ , остава тангенциална към  $P^3$ , докато съществува.

**Definiton 2.2.** Нека  $(P^3, p) \hookrightarrow (\mathcal{L}^4, g)$  е фотонна повърхнина. Тогава  $P^3$  се нарича фотонна сфера, ако lapse функцията  $N$  е константна върху  $P^3$  и едноформата  $\iota_\xi F$  е нормална към  $P^3$ .

Единственост на статичното пространство-време на АМ чрез фотони сфери

Ще допуснем, че lapse функцията  $N$  регулярно разслоява пространство-времето извън фотонната сфера, т. е.

$$\rho^{-2} = g({}^g\nabla N, {}^g\nabla N) \neq 0 \quad (4)$$

извън фотонната сфера. Пространствената част от тази външна област ще означим с  $M_{\text{ext}}^3$  и по дефиниция тя има за вътрешна граница сечението  $\Sigma$  на най-външната фотонна сфера с времеви слой  $M^3$ . По дефиниция  $\Sigma$  се дава от  $N = N_0$  за някое  $N_0 \in \mathbb{R}^+$ . Като следствие от нашето допускане всички множества, за които  $N = \text{const}$ , включително  $\Sigma$ , топологично са сфери и  $M_{\text{ext}}^3$  топологично е  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ .

Дефинираме едноформата на електричното поле  $E$  като

$$E = -\iota_\xi F, \quad (5)$$

и тя удовлетворява  $dE = 0$ . От това следва съществуването на електричен потенциал  $\Phi$ , такъв че  $E = d\Phi$ . Можем да напишем явен израз за  $F$ ,

$$F = -N^{-2}\xi \wedge d\Phi. \quad (6)$$

По дефиниция електричното поле  $E$  е нормално към фотонната сфера и следователно електричният потенциал  $\Phi$  е константен върху нея. Ще наложим условието  $\Phi_\infty = 0$ .

Размерно редуцираните статични уравнения на Айнщайн-Максуел са:

$${}^g\Delta N = N^{-1} {}^g\nabla^i \Phi {}^g\nabla_i \Phi, \quad (7)$$

$${}^gR_{ij} = N^{-1} {}^g\nabla_i {}^g\nabla_j N + N^{-2} (g_{ij} {}^g\nabla^k \Phi {}^g\nabla_k \Phi - 2 {}^g\nabla_i \Phi {}^g\nabla_j \Phi), \quad (8)$$

$${}^g\nabla^i (N^{-1} {}^g\nabla_i \Phi) = 0. \quad (9)$$

Има функционална зависимост между  $N$  и  $\Phi$

$$N^2 = \Phi^2 - 2\frac{M}{Q}\Phi + 1, \quad (10)$$

за която може да бъде показано, че важи върху цялото  $M_{\text{ext}}^3$ .

От принципа за максимума за елиптични частни диференциални уравнения и от асимптотичното поведение на  $N$  за  $r \rightarrow \infty$  получаваме за стойностите на  $N$  върху  $M_{\text{ext}}^3$  следните неравенства:

$$N_0 \leq N < 1. \quad (11)$$

### 3 Помощни равенства и теореми

Втората фундаментална форма на  $P^3$  може да бъде записана като  $\mathfrak{h} = \frac{\mathfrak{H}}{3}p$  [1], където  $\mathfrak{H}$  е средната кривина на  $P^3$ . Използвайки това можем да докажем теорема за средната и скаланата кривина на фотонната сфера  $P^3$  в нашето пространство-време.

Theorem 3.1. Нека  $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g}, F)$  е статично, асимптотически плоско пространство-време на Айнщайн-Максуел, съдържащо фотонна сфера  $(P^3, p) \hookrightarrow (\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ . Тогава  $P^3$  има константна средна кривина (КСрК) и константна скаларна кривина (КСК).

Доказателство. Доказателството на теоремата използва уравненията на Гаус и Кодаци за  $(P^3, p) \hookrightarrow (\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$  с единичен нормален вектор  $\nu$ . Освен това използваме, че  $E_\nu = \iota_E \nu$  е константа върху  $P^3$ , което е показано по-долу. Скаларната кривина на  $P^3$  е

$${}^p R = \frac{2}{3}\mathfrak{H}^2 + 2\frac{E_\nu^2}{N^2}. \quad (12)$$

□

След това пресмятаме втората фундаментална форма  $h$  на  $(\Sigma, \sigma) \hookrightarrow (M^3, g)$  в единичен нормален вектор  $\nu$ . Нека  $X, Y, Z \in \Gamma(T\Sigma)$  да произволни тангенциални вектори към  $\Sigma$ . Тогава

$$h(X, Y) = \frac{\mathfrak{H}}{3}\sigma(X, Y). \quad (13)$$

Следователно виждаме, че  $\Sigma$  има КСрК  $H = \frac{2}{3}\mathfrak{H}$ . Сега използваме уравнението на Кодаци за  $(\Sigma, \sigma) \hookrightarrow (M^3, g)$  и достигаем до  ${}^g R(Y, \nu) = 0$ , чрез което можем да покажем, че  $\nu(N)$  е константа върху  $\Sigma$  (т. е.  ${}^g \mathcal{L}_X(\nu(N)) = 0$ ). Като директно следствие от (10) получаваме, че  $E_\nu$  също е константа върху  $\Sigma$  и следователно – върху  $P^3$ .

Чрез няколко прилагания на контрактираното уравнение на Гаус, както и на теоремата на Гаус-Боне, дефиницията на Комар за масата  $M$  и уравнението

$${}^g \Delta N = \sigma \Delta N + {}^g \nabla^2 N(\nu, \nu) + (\sigma \text{tr} h)\nu(N), \quad (14)$$

за  $(\Sigma, \sigma) \hookrightarrow (M^3, g)$  получаваме

$$1 = \frac{4\pi Q^2}{A_\Sigma} + \frac{2}{3}(M - Q\Phi_0)H \quad (15)$$

и

$$2\nu(N) = N_0 H. \quad (16)$$

Единственост на статичното пространство-време на АМ чрез фотони сфери

#### 4 Теорема за единственост

Definiton 4.1. Една фотонна сфера се нарича неекстремална, ако

$$\frac{1}{4\pi}H^2A_\Sigma \neq 1. \quad (17)$$

В нашия случай фотонната сфера е неекстремална, само ако  $M^2 \neq Q^2$ . Theorem 4.1. Нека  $(\mathfrak{L}_{ext}^4, \mathfrak{g}, F)$  е статично и асимптотически плоско пространство-време с дадена маса  $M$  и заряд  $Q$ , удовлетворяващо уравненията на Айнщайн-Максуел и притежаващо фотонна сфера, която е вътрешна граница на  $\mathfrak{L}_{ext}^4$ . Допускаме, че lapse функцията регулярно разслоява  $\mathfrak{L}_{ext}^4$ . Тогава  $(\mathfrak{L}_{ext}^4, \mathfrak{g}, F)$  е изометрично на пространство-времето на Райснер-Нордстрьом с маса  $M$  и заряд  $Q$ , удовлетворяващи неравенството  $\frac{Q^2}{M^2} \leq \frac{9}{8}$ .

Доказателство. Първо разглеждаме 3-метриката  $\gamma_{ij}$  върху  $M_{ext}^3$ , дефинирана като

$$\gamma_{ij} = N^2 g_{ij}. \quad (18)$$

След това записваме размерно редуцираните статични уравнения на Айнщайн-Максуел чрез новата метрика  $\gamma_{ij}$ . Допълнителна редукция може да се постигне като се отчете, че  $N$  и  $\Phi$  са функционално зависими (от (10)) и вместо да се използва  $N$  или  $\Phi$  можем да използваме друг потенциал  $\tilde{\lambda}$ , дефиниран като

$$d\tilde{\lambda} = -N^{-2}d\Phi, \quad \tilde{\lambda}_\infty = 0. \quad (19)$$

Трябва да бъдат разгледани два случая:  $\frac{Q^2}{M^2} < 1$  и  $\frac{Q^2}{M^2} > 1$ , използвайки неравенствата

$$\int_{M_{ext}^3} D^i [\Omega^{-1} (\Gamma D_i \chi - \chi D_i \Gamma)] \sqrt{\gamma} d^3 x \geq 0 \quad (20)$$

и

$$\int_{M_{ext}^3} D^i (\Omega^{-1} D_i \chi) \sqrt{\gamma} d^3 x \geq \int_{M_{ext}^3} D^i [\Omega^{-1} (\Gamma D_i \chi - \chi D_i \Gamma)] \sqrt{\gamma} d^3 x \quad (21)$$

където  $\chi$ ,  $\Gamma$  и  $\Omega$  са дефинирани по подходящ начин за всеки от случаите. Освен това трябва да използваме различен потенциал  $\lambda(\tilde{\lambda})$  за двата случая. Тогава можем да покажем, че тензорът на Бах става нула,  $R(\gamma)_{ijk} = 0$ , т. е.  $g_{ij}$  е конформно плоска. Това постигаме като

С. Язаджиев, Б. Лазов

показваме, че (20) и (21) стават равенства, което е еквивалентно на  $R(\gamma)_{ijk} = 0$ .

Пресмятайки  $R(g)_{ijk}R(g)^{ijk}$  можем да покажем, че геометрията на пространството е сферичносиметрична. Тогава от теоремата на Биркхоф можем да видим, че пространство-времето е изометрично на това на Райснер-Нордстрьом.

Ограничението  $\frac{Q^2}{M^2} \leq \frac{9}{8}$  се получава от равенствата (20) и (21).

□

## 5 Коментари

Доказахме, че статичните и асимптотически плоски решения на уравненията на Айнщайн-Максуел с маса  $M$  и електричен заряд  $Q$ , притежаващи неекстремална фотонна сфера са изометрични на пространство-времето на Райснер-Нордстрьом със същите маса и заряд, удовлетворяващи условието  $\frac{Q^2}{M^2} \leq \frac{9}{8}$ . Трябва да се отбележи, че теоремата ни не покрива екстремалния случай, който изисква сложни техники. Освен това условието, че lapse функцията разслоява пространство-времето регулярно също може да бъде премахнато, но трябва да платим цена за това, а именно – технически по-детайлно доказателство.

## References

- [1] S. Yazadjiev, B. Lazov (2015) Uniqueness of the static Einstein-Maxwell spacetimes with a photon sphere. *Classical and Quantum Gravity* 32 16.